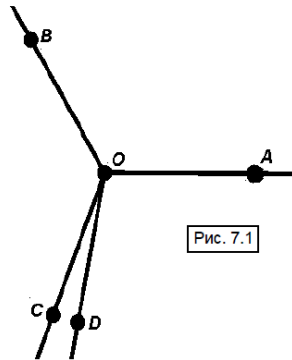


Муниципальный этап ВСОШ 2024-2025 уч.г.
математика 7 класс критерии проверки
Работа рассчитана на 180 минут

1. Начертите четыре луча OA , OB , OC и OD с общим началом так, чтобы на этом чертеже нашлись углы в 100° , 110° , 120° , 130° и 140° . Запишите, какие именно углы имеют указанные величины.

Ответ: $\angle AOD = 100^\circ$, $\angle AOC = 110^\circ$, $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle BOC = 130^\circ$, $\angle BOD = 140^\circ$ (см. рис. 7.1).



Можно, например, действовать следующим образом: сначала провести лучи OA , OB и OD так, что $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle BOD = 140^\circ$, $\angle AOD = 100^\circ$. Это возможно, так как сумма таких углов равна 360° . Затем провести луч OC между сторонами угла BOD так, чтобы $\angle COD = 10^\circ$, тогда $\angle AOC = 110^\circ$, $\angle BOC = 130^\circ$.

Критерии проверки:

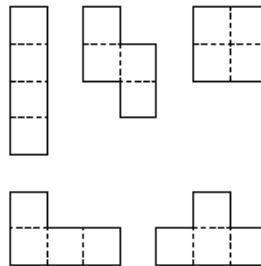
2 балла - приведен верный чертеж и верно записаны все требуемые углы;

1 балл - приведен верный чертеж, на котором отмечена часть требуемых углов (либо записана отдельно), а остальные углы однозначно восстанавливаются;

1 балл - приведен правдоподобный чертеж, но по имеющимся записям требуемые углы не восстанавливаются однозначно;

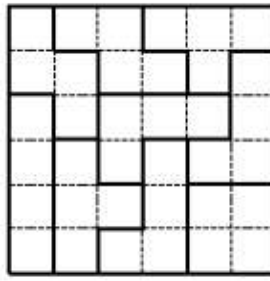
0 баллов - приведен неверный чертеж или он отсутствует.

2. Заполните квадрат размером 6×6 фигурками тетриса (см. рисунок) так, чтобы использовать фигурки каждого из указанных видов. (Фигурки можно как поворачивать, так и переворачивать.)



Ответ: например, см. рис. 7.2.

Рис. 7.2



Существуют и другие примеры.

Критерии проверки:

2 балла – приведен верный пример;

1 балл – приведено несколько примеров, среди которых есть как верный, так и неверные;

1 балл – приведен только пример, в котором отсутствует ровно один из указанных видов тетриса;

0 баллов – задача не решена или решена неверно.

3. Вчера Никита купил несколько ручек: чёрные – по 9 рублей за штуку и синие – по 4 рубля за штуку. Зайдя сегодня в тот же магазин, он обнаружил, что цены на ручки изменились: чёрные стали стоить 4 рубля за штуку, а синие – 9 рублей. Увидев такое, Никита сказал с досадой: “Покупай я те же ручки сегодня, сэкономил бы 49 рублей”. Не ошибается ли он?

Ответ: Никита ошибается.

Решение. Первый способ. Пусть Никита купил x черных ручек и y синих ручек, тогда он заплатил $9x + 4y$ рублей. После изменения цен стоимость ручек стала равна $4x + 9y$ рублей. Пусть Никита не ошибся, тогда $(9x + 4y) - (4x + 9y) = 49$. Преобразовав левую часть этого уравнения, получим: $5(x - y) = 49$. Так как x и y – целые числа, то число $(x - y)$ также целое. Тогда полученное уравнение не имеет целых решений, так как 49 не делится на 5. Противоречие.

Второй способ. Заметим, что цена каждой ручки изменилась на 5 рублей, значит, что и общая стоимость всех ручек изменилась на величину кратную пяти. Так как 49 не делится на 5, то Никита ошибается.

Критерии проверки:

3 балла – приведено полное обоснованное решение;

2 балла – приведено верное в целом рассуждение с незначительными пробелами;

1 балл – верно составлено уравнение, но дальнейших продвижений нет

1 балл – присутствует утверждение о противоречии, связанном с делимостью на 5, но оно не обосновано;

0 баллов – ответ получен на основании рассмотрения частных случаев;

0 баллов – приведен только ответ;

0 баллов – задача не решена или решена неверно.

4. Каждый из тринадцати гномов – рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Однажды все гномы по очереди сделали

заявление: “Среди заявлений, сделанных ранее, ложных ровно на два больше, чем истинных”. Сколько рыцарей могло быть среди гномов?

Ответ: 6.

Решение. Первые два утверждения заведомо ложные, так как до каждого из них было сделано менее двух заявлений. Третье заявление истинно, так как до него было произнесено 2 ложных заявления и ноль истинных. Четвертое заявление ложно, так как к двум ложным заявлениям добавилось одно истинное, а пятое заявление снова истинно.

Рассуждая аналогично, получим, что все гномы, делающие далее чётное утверждение, говорили ложь, а гномы, делающие нечётное утверждение, говорили правду. Таким образом, рыцарями являются гномы, выступавшие под номерами: 3, 5, 7, 9, 11 и 13.

Критерии проверки.

3 балла - приведено полное обоснованное решение и получен верный ответ;

2 балла - приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности и получен верный ответ;

1 балл - верно указаны только номера гномов, сказавших правду, но какие-либо пояснения отсутствуют;

0 баллов - приведен только ответ;

0 баллов - приведено неверное решение или оно отсутствует.

5. Вдоль прямолинейного участка границы установлено 15 столбов. Около каждого столба поймали несколько близоруких шпионов. Каждый из них честно сказал, сколько других шпионов он видел. Но любой шпион видел только тех, кто находился около его столба и около ближайших соседних столбов. Можно ли по этим данным восстановить численность шпионов, пойманных около каждого столба?

Ответ: можно.

Решение. Занумеруем столбы числами от 1 до 15 слева направо. Из опроса всех шпионов, пойманных у второго столба, узнаем суммарную численность шпионов у первых трех столбов, а из опроса шпионов, пойманных у первого столба, узнаем численность шпионов, пойманных у первого и второго столбов. Вычитая из первого результата второй, узнаем сколько шпионов поймали у третьего столба. Далее, опросив шпионов, пойманных у пятого и четвертого столбов, и зная количество шпионов, пойманных у третьего столба, найдем количество шпионов, пойманных у шестого столба. Аналогично определяется, сколько шпионов поймано у столбов с номерами 9, 12 и 15. Теперь, опросив шпионов у столба с номером 15, узнаем, сколько шпионов поймано у столба с номером 14. Дальнейшие опросы можно проводить “с конца” различными способами. Например, достаточно опросить шпионов у столбов с номерами 14, 12, 10, 9, 7, 6, 4, 3, устанавливая тем самым, сколько шпионов поймано у столбов с номерами 13, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 2 и 1 соответственно.

Критерии проверки.

3 балла – приведено полное обоснованное решение;

2 балла – верно описан алгоритм, позволяющий ответить на вопрос задачи, но не написано, как именно находить требуемые количества;

1 балл – присутствует верная идея решения, но она не доведена до конца;

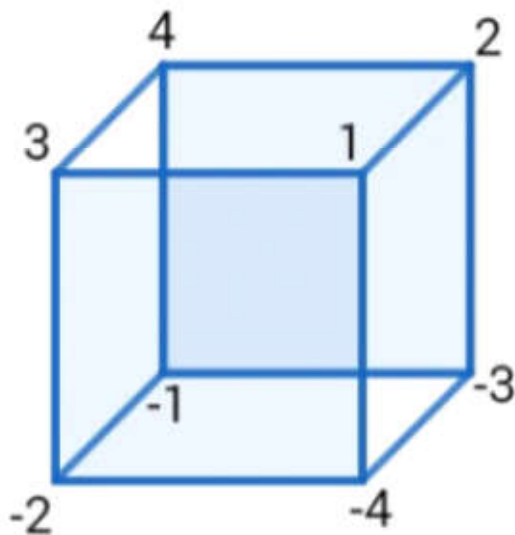
0 баллов – приведен только ответ;

0 баллов – задача не решена или решена неверно.

6. В каждой вершине куба живёт число, не обязательно положительное. Все восемь чисел различны. Если число равно сумме трёх чисел, живущих в соседних с ним вершинах, то оно счастливо. Какое наибольшее количество счастливых чисел может жить в вершинах куба?

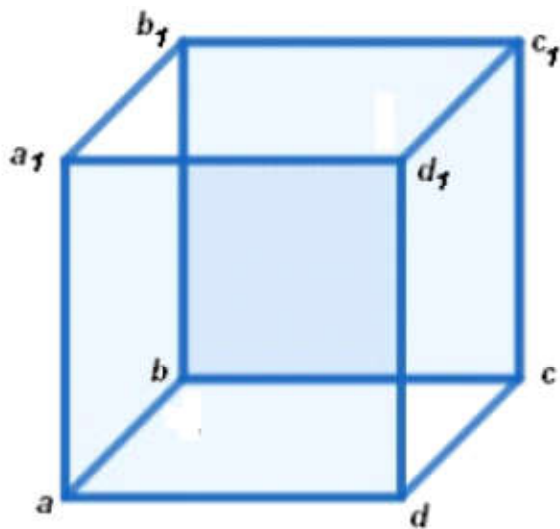
Ответ: 8.

Решение. См., например, рис. 5а.



Легко проверить, что в каждой вершине куба стоит счастливое число.

Существуют и другие примеры. Разберёмся, как они устроены (от участников олимпиады этого не требовалось). Обозначим числа, стоящие в вершинах куба (см. рис. 5б).



Запишем сначала два равенства для противоположных вершин нижнего квадрата: $a = a_1 + v + d$ (1); $c = c_1 + v + d$ (2). Вычитая из равенства (1) равенство (2), получим: $a - c = a_1 - c_1$ (3). Теперь запишем аналогичные равенства для двух вершин вертикального ребра: $v = v_1 + a + c$ (4); $v_1 = v + a_1 + c_1$ (5). Подставив v_1 из равенства (5) в равенство (4), получим: $a + c = -a_1 - c_1$ (6). Объединив равенства (3) и (6) в систему, получим, что $a = -c_1$; $c = -a_1$. Таким образом, числа, стоящие в противоположных вершинах куба должны быть противоположными (аналогичные равенства для двух других пар чисел следуют из симметрии куба).

Следовательно, для построения любого примера достаточно выбрать одну из вершин куба и обозначить числа, живущие в соседних с ней вершинах, например, через x , y и z . Для того, чтобы выбранная вершина была счастлива, поселим в неё число $x + y + z$. Требуется только, чтобы модули чисел x , y , z и $x + y + z$ были попарно различными. Тогда останется поселить в противоположных вершинах числа $-x$, $-y$, $-z$ и $-x - y - z$ соответственно. Нетрудно убедиться, что все восемь чисел счастливы.

Критерии проверки.

3 балла - приведены верный ответ и верный пример;

0 баллов - приведен только ответ;

0 баллов - приведен неверный пример или он отсутствует.

7.5. В каждой вершине куба живёт число, не обязательно положительное. Все восемь чисел различны. Если число равно сумме трёх чисел, живущих в соседних с ним вершинах, то оно счастливо. Какое наибольшее количество счастливых чисел может жить в вершинах куба?

Ответ: 8.

Решение. См., например, рис. 7.5а. Легко проверить, что в каждой вершине куба стоит счастливое число.

Существуют и другие примеры. Разберёмся, как они устроены (от участников олимпиады этого не требовалось). Обозначим числа, стоящие в вершинах куба (см. рис. 7.5б). Запишем сначала два равенства для противоположных вершин нижнего квадрата: $a = a_1 + b + d$ (1); $c = c_1 + b + d$ (2). Вычитая из равенства (1) равенство (2), получим: $a - c = a_1 - c_1$ (3).

Теперь запишем аналогичные равенства для двух вершин вертикального ребра: $b = b_1 + a + c$ (4); $b_1 = b + a_1 + c_1$ (5). Подставив b_1 из равенства (5) в равенство (4), получим: $a + c = -a_1 - c_1$ (6). Объединив равенства (3) и (6) в систему, получим, что $a = -c_1$; $c = -a_1$. Таким образом, числа, стоящие в противоположных вершинах куба должны быть противоположными (аналогичные равенства для двух других пар чисел следуют из симметрии куба).

Следовательно, для построения любого примера достаточно выбрать одну из вершин куба и обозначить числа, живущие в соседних с ней вершинах, например, через x , y и z . Для того, чтобы выбранная вершина была счастлива, поселим в неё число $x + y + z$. Требуется только, чтобы модули чисел x , y , z и $x + y + z$ были попарно различными. Тогда останется поселить в противоположных вершинах числа $-x$, $-y$, $-z$ и $x - y - z$ соответственно. Нетрудно убедиться, что все восемь чисел счастливы.

Критерии проверки.

“+” Приведены верный ответ и верный пример

“-” Приведен только ответ

“=” Приведен неверный пример или он отсутствует

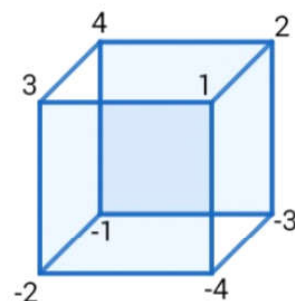


Рис. 7.5а

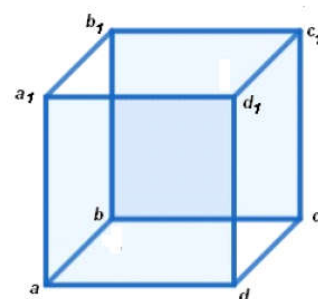


Рис. 7.5б